

学生アンケートにて、「数学の授業なのに，“微分積分の説明箇所、これらの公式は暗記しておいてね”，という台詞が多かった。数学という名の暗記科目ならはじめから数学と言わないでほしい」という意見が数件ありました。高校で微分積分を学んでこなかった学生が存在するので（それらの学生でも半分以上は大学で前期に学んでいるはずですが、一定数の学生は落としています）、さらりと説明しておかないと授業にならないのです。よって微分積分の公式と演習の解説を授業中で簡単にさせていただきました。でも言い訳をさせていただきますと、私の担当している数学では微積を使用しますが（確率統計・電子情報数学など）、微分積分だけを基礎からしっかり教授する授業ではないのです。シラバスにも明記してありますし、最初の講義で話してもいますが、「微積を使うので未学習の方は受講しない方が良い」という文を読んでいない、聞いていない学生からの意見ではないかと推測しております。

本資料の暗記しておく微分公式の一部は授業中で説明したうえで証明を行い、皆さんの理解度を小テストでも確認したのですが、小テストでまともに解答にたどり着けた学生がほとんどいない結果でしたよね。（皆さんも記憶はあるでしょう？）「これらの微分公式はよく使用するものですから暗記しておいてください」と確かに話しましたし、公式暗記で対応する方法で教えるのは時間の都合上、今後も変わらないと思います。しかし、自身で勉強できるようにするため、授業で紹介したすべての式の証明をこの資料に示しておきたいと思います。ただし、加法定理とか極限の公式（結局結果を暗記）が普通に出てきますので、それらは高校時代の教科書に立ち戻って自身で復習するか、教育開発センターで教えてもらうか自身で対策しておいてください。ここに記したように微分公式を毎回導出するのではなく、基本は使う機会が多いので暗記しておくのが望ましい。しかし、これらの公式を忘れてしまった場合、この資料の証明方法を学んでおけば導出できます。

1. 暗記しておく微分公式

$$y = x^n \quad \text{ならば} \quad y' = nx^{n-1}$$

$$\begin{aligned} & (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} - a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 - \dots - a^2b^{n-2} - ab^{n-1} - b^n \\ &= a^n - b^n \quad \dots(1) \end{aligned}$$

$a = x + \Delta x, b = x$ とおき、関数 $y = x^n$ の増分を k とすると、(1)に代入して次式が得られる。

$$k = (x + \Delta x)^n - x^n = \Delta x \{ (x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + \dots + (x + \Delta x)x^{n-2} + x^{n-1} \}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k}{\Delta x} = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} + x^{n-1}}_{n \text{ 個}} = nx^{n-1}$$

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = nx^{n-1}$$

2. 暗記しておく積の微分公式

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\{f(x)g(x)\}' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

ここで $f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) = f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x)g(x) + f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x)$ と $-f(x + \Delta x)g(x) + f(x + \Delta x)g(x)$ を挿入する。これは引いて足してあるので等式が成り立つ。

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} f(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = g'(x) \quad , \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \quad , \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x+\Delta x) = f(x)$$

となるので、 $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ が成り立つ。

3. 暗記しておく逆数の微分公式

$$\left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$\left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x+\Delta x)} - \frac{1}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{g(x) - g(x+\Delta x)}{g(x)g(x+\Delta x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \cdot \frac{-1}{g(x)g(x+\Delta x)}$$

$$\text{ここで } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = g'(x) \quad , \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{g(x)g(x+\Delta x)} = \frac{-1}{\{g(x)\}^2} \quad \text{となる。}$$

$$\therefore \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

4. 暗記しておく商の微分公式

$$\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

この証明には 2, 3 で証明した積の微分公式と逆数の微分公式を利用します。

$$\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \left\{ f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right\}' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}'$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x) \cdot \frac{-g'(x)}{\{g(x)\}^2} = \frac{f'(x)g(x)}{\{g(x)\}^2} - \frac{f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$\therefore \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

5. 暗記しておく合成関数の微分公式

$$\{g(f(x))\}' = g'(f(x))f'(x) \quad , \quad u = f(x) \quad , \quad y = g(x) \quad \text{とすると} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

この公式の使い方について、理解できない学生が多いため具体例を示します。

例題 $y = (x^3 + 1)^2$ の微分について

$$\{(x^3 + 1)^2\}' = 2(x^3 + 1) \cdot (x^3 + 1)' = 6x^2(x^3 + 1)$$

$$u = x^3 + 1 \quad \text{とおくと} \quad y = u^2 \quad \text{なので} \quad \frac{du}{dx} = 3x^2, \quad \frac{dy}{du} = 2u$$

$$\text{よって} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot 3x^2 = 6x^2(x^3 + 1)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))}{f(x + \Delta x) - f(x)} \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))}{f(x + \Delta x) - f(x)} \cdot f'(x)$$

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] = 0$ より $f(x + \Delta x) - f(x) = k$ とおくと $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $k \rightarrow 0$
 ここで $u = f(x)$ とすると $f(x + \Delta x) = f(x) + k = u + k$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))}{f(x + \Delta x) - f(x)} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(u + k) - g(u)}{k} = g'(u) = g'(f(x))$$

$$\therefore \{g(f(x))\}' = g'(f(x))f'(x) \quad , \quad u = f(x) \quad , \quad y = g(x) \text{ とすると } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

6. 暗記しておく三角関数の微分公式

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

オイラーの公式より, 加法定理を求める。

$$\varepsilon^{j\alpha} \cdot \varepsilon^{j\beta} = (\cos\alpha + j\sin\alpha)(\cos\beta + j\sin\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + j(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

$$\varepsilon^{j\alpha} \cdot \varepsilon^{j\beta} = \cos(\alpha + \beta) + j\sin(\alpha + \beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad \dots(2)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad \dots(3)$$

β を $-\beta$ で置き換え, (2),(3)式を変形すると

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad \dots(4)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \quad \dots(5)$$

(3),(5)式の辺々(へんぺんと読みます)を加えると

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta \quad \dots(6)$$

(6)式において, $\alpha + \beta = A$, $\alpha - \beta = B$ とおくと

$$\alpha = \frac{A+B}{2} \quad , \quad \beta = \frac{A-B}{2} \quad \text{となるので} \quad \sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \quad \dots(7)$$

の公式が得られる。

$$\text{公式(7)で } B \text{ を } -B \text{ で置き換えると } \sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} \quad \dots(8)$$

が導かれる。

暗記しておく三角関数の極限公式 (この証明は付録)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$(\sin x)' = \frac{d}{dx} \sin x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = (\cos x) \cdot 1$$

$$\therefore (\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = \frac{d}{dx} \cos x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos \Delta x - 1) - \sin x \sin \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} - \sin x \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right] = \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x$$

$$\therefore (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

7. 暗記しておく指数関数の微分公式

$$(a^x)' = a^x \log a \quad , \quad (e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

$$\log a^x = \log a^x \cdot \log e = \log e^{\log a^x} \quad , \quad \text{よ} \ddot{r} \quad a^x = e^{\log a^x}$$

$$a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\log a^{\Delta x}} - 1}{\log a^{\Delta x}} \cdot \frac{\log a^{\Delta x}}{\Delta x}$$

暗記しておく対数関数と指数関数の極限の公式

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\log a^{\Delta x}} - 1}{\log a^{\Delta x}} = 1 \quad , \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log a^{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \log a}{\Delta x} = \log a$$

$$\therefore (a^x)' = a^x \cdot 1 \cdot \log a = a^x \log a$$

上記の結果より $(e^x)' = e^x \cdot \log e = e^x \cdot 1 = e^x$

8. 暗記しておく対数関数の微分公式

$$(\log x)' = \frac{1}{x}, \quad (\log|x|)' = \frac{1}{x}, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}, \quad (\log_a|x|)' = \frac{1}{x \log a}$$

$$(\log x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log(x + \Delta x) - \log x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \log \frac{x + \Delta x}{x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \log \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

暗記しておく e に近づく極限の公式

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \quad , \quad \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = e$$

$$\therefore (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$x > 0 \text{ のとき } (\log x)' = \frac{1}{x} \text{ なの} \ddot{r} \text{, } x < 0 \text{ のときは } (\log(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

$$\therefore (\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

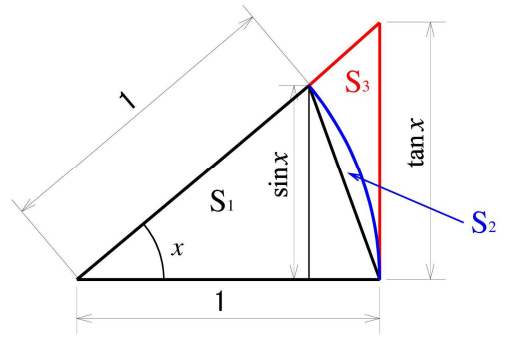
$$\log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a} = \frac{\log x}{\log a} = \frac{1}{\log a} \cdot \log x \quad \therefore (\log_a x)' = \frac{1}{\log a} \cdot (\log x)' = \frac{1}{x \log a}$$

$$x > 0 \text{ のとき } (\log_a x)' = \frac{1}{x \log a} \text{ なの} \ddot{r} \text{, } x < 0 \text{ のときは } (\log_a(-x))' = \frac{1}{\log a} \cdot (\log(-x))' = \frac{1}{\log a} \cdot \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x \log a}$$

$$\therefore (\log_a|x|)' = \frac{1}{x \log a}$$

暗記しておく三角関数の極限公式

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$



黒色三角形の面積を S_1 とすると、底辺は 1 で高さは $\sin x$ なので $S_1 = 1 \cdot \sin x \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sin x}{2}$

青色扇形の面積を S_2 とすると、円の半径は 1, 角度が x , 一周の角度は 2π であるので

$$S_2 = 1^2 \cdot \pi \cdot \frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}$$

赤色三角形の面積を S_3 とすると底辺は 1 で高さは $\tan x$ なので

$$S_3 = 1 \cdot \tan x \cdot \frac{1}{2} = \frac{\tan x}{2}$$

図から、 $0 < x < \pi/2$ のとき、 $S_1 \leq S_2 \leq S_3$ がいえる。よって $\frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}$, $\sin x \leq x \leq \tan x$

$$\sin x \leq x \text{ より } \frac{\sin x}{x} \leq 1, \quad x \leq \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ より } \cos x \leq \frac{\sin x}{x}, \text{ ゆえに } \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1 \text{ から } 1 \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \text{ となる}$$

$$\text{はさみうちの原理より } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ となる。}$$

$$\frac{\pi}{2} < x < 0 \text{ のとき } \lim_{x \rightarrow -0} \cos -x \leq \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin -x}{-x} \leq 1 \text{ となる。}$$

$$\cos -x = \cos x, \sin -x = -\sin x \text{ なので } \lim_{x \rightarrow -0} \cos x \leq \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} \leq 1 \text{ となり, 同様に計算できる。}$$

上記の結果を用いて

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cdot (1 + \cos x)}{x^2 \cdot (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = 1^2 \cdot \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

暗記しておく e に近づく極限の公式

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = e$$

x	$(1+1/x)^x$
1	2.00000
10	2.59374
100	2.70481
1000	2.71692
10000	2.71815
100000	2.71827
1000000	2.71828

自然対数 e をネイピア数と呼んでいます。これは $e=2.718281828459045\dots$ フナー一鉢二鉢一鉢二鉢至極美味しい (ふなひとはちふたはちひとはちふたはちしごくおいしい) と覚えると授業中に説明したと思いますが、これは色々計算に使う上で都合が良い数字なのです。エクセルで計算すると $(1+\frac{1}{1})^1 = 2.00000\dots$, $(1+\frac{1}{10})^{10} = 2.259374\dots$, $(1+\frac{1}{100})^{100} = 2.70481\dots$, $(1+\frac{1}{1000})^{1000} = 2.71692\dots$, $(1+\frac{1}{10000})^{10000} = 2.71815\dots$, $(1+\frac{1}{100000})^{100000} = 2.71827\dots$, $(1+\frac{1}{1000000})^{1000000} = 2.71828\dots$

となって、上記の値に収束していきます。この収束する値をネイピア数と呼んでいます。微分公式の解説で $(a^x)' = a^x \cdot 1 \cdot \log a = a^x \log a$ と教えたが、 $a=e$ ならば $(e^x)' = e^x \cdot \log e = e^x \cdot 1 = e^x$ となって微分しても同じ結果にするのに都合の良い定数がネイピア数です。

この都合のいいネイピア数を次の式で定義しています。

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

ここで $x = \frac{1}{h}$ とおくと $h = \frac{1}{x}$ となり, $x \rightarrow \pm\infty$ ならば $h \rightarrow 0$ となる。

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = e \quad \text{となる。}$$

暗記しておく対数関数と指数関数の極限の公式

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \log(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \log(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

ここで, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ より, $\lim_{x \rightarrow 0} \log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \log e = 1$

$h = e^x - 1$ とすると $x \rightarrow 0$ ならば $h \rightarrow 0$ となる。

$$e^x = h + 1 \text{ より } \log e^x = x \log e = x = \log(h + 1)$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\log(h + 1)} = 1$$