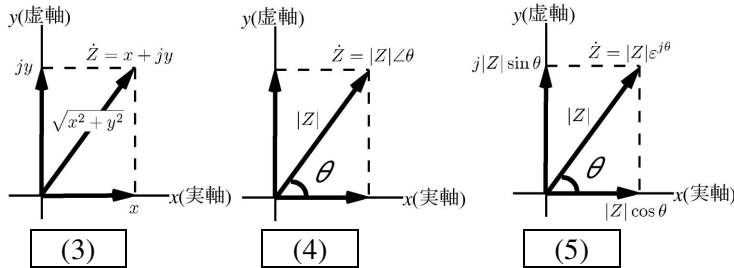


問1 速度, 力, 電界の強さ, 磁界の強さなどのように, 大きさとその方向を指定しないと定まらない量を (1) といい,  $\dot{A}$ ,  $\vec{A}$ ,  $\mathbf{A}$  などの記号を用いる。これに対し, 温度, 高さ, 電位, エネルギーなどのように, 大きさのみを指定すれば定まる量を (2) という。複素ベクトルには3種類の表示法がありそれぞれの名称は



である。(5) で使われている  $e^{j\theta}$  は実部, 虚部の式で表すと (6) となり, この式を一般的に (7) と呼んでいる。

(1) ベクトル      (2) スカラー      (3) 複素数表示      (4) 極座標表示

(5) 指数関数表示      (6)  $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$       (7) オイラーの公式

問2 次のベクトル表示を他の表示法に変換せよ。

(1)  $1 + j$

絶対値:  $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$       偏角:  $\tan^{-1} \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} [\text{rad}] = 45^\circ$  ]

であるので

座標表示:  $\sqrt{2} \angle 45^\circ = \sqrt{2} \angle \frac{\pi}{4}$       指数関数表示:  $\sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$

(2)  $2e^{j\frac{\pi}{3}}$

$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  より

複素数表示:  $2 \times \left( \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + j\sqrt{3}$

極座標表示:  $2 \angle \frac{\pi}{3} = 2 \angle 60^\circ$

問3  $\dot{I}_1 = 12 + j5[A]$  と  $\dot{I}_2 = 18 - j45[A]$  の合成電流の絶対値はいくらか。

複素数の加算より

$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = (12 + j5) + (18 - j45) = 30 - j40[A]$

絶対値は  $\sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2500} = 50[A]$

問4 交流回路網中の点 A の電位  $\dot{V}_A = 40e^{j\frac{\pi}{6}}[V]$

B 点の電位  $\dot{V}_B = 50e^{j\frac{\pi}{2}}[V]$  であるとき、B 点から見た A 点との電位差の絶対値と位相を求めよ。

$$\dot{V}_A = 40 \left( \cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6} \right) = 20\sqrt{3} + j20$$

$$\dot{V}_B = 50 \left( \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} \right) = 0 + j50$$

B 点から見た A 点はベクトルで表現すると

$\dot{V}_{AB}$  または  $V_{\overrightarrow{BA}}$  であるので電位差は

$$\begin{aligned} \dot{V}_{AB} &= \dot{V}_A - \dot{V}_B = (20\sqrt{3} + j20) - (0 + j50) \\ &= 20\sqrt{3} - j30 \end{aligned}$$

絶対値を求めると

$$|\dot{V}_{AB}| = \sqrt{(20\sqrt{3})^2 + 30^2} = \sqrt{2100} = 10\sqrt{21}$$

位相差を求めると

$$\Delta\theta = \tan^{-1} \frac{-30}{20\sqrt{3}} = \tan^{-1} \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

問5 複素数表示の交流電圧、電流が  $\dot{V}, \dot{I}$  のとき、電力  $\dot{S} = \bar{V}\dot{I}$  で求まり、 $\dot{S}$  の実部が有効電力、虚部が無効電力（進相分が正）である。電圧  $\dot{V} = 80 + j40[V]$ 、電流  $\dot{I} = 20 - j10[A]$  であるとき、有効電力 P と無効電力 Q はいくらになるか。P, Q とも単位を書くこと。

電圧  $\dot{V}$  の共役複素数（きょうやくふくそすう） $\bar{V}$

は、虚部の符号を逆にして  $\bar{V} = 80 - j40$  であるから

$$\dot{S} = \bar{V}\dot{I} = (80 - j40)(20 - j10) = 1200 - j1600$$

ただし、 $j^2 = -1$

すなわち

有効電力 P は 1200[W]、無効電力（遅れ）Q は 1600[var]

問6 抵抗  $4\Omega$ 、リアクタンス  $3\Omega$  を並列に接続した回路の合成インピーダンスを求めよ。

インピーダンス  $\dot{Z}$  は交流回路の抵抗の意味で、直流抵抗  $R[\Omega]$ 、リアクタンス  $X[\Omega]$  とすれば、複素数表示では  $\dot{Z} = R + jX[\Omega]$  となる。またインピーダンス  $\dot{Z}_1, \dot{Z}_2$  の並列インピーダンスは

$$\dot{Z} = \frac{1}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2}} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}$$

$\dot{Z}_1 = 4, \dot{Z}_2 = j3$  を代入すると

$$\dot{Z} = \frac{4 \times j3}{4 + j3} = \frac{j12}{4 + j3} \times \frac{4 - j3}{4 - j3} = \frac{36}{25} + j\frac{48}{25}$$

問7 インピーダンス  $Z = 3 + j4[\Omega]$  の回路に、電圧  $\dot{V} = 50 - j90[V]$  を加えるとき、流入する電流  $\dot{I}$  を求めよ。

交流回路のオームの法則は、電圧  $\dot{V}$ 、電流  $\dot{I}$ 、インピーダンス  $Z$  をすべてベクトル量として扱い、複素数で表すと

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z} = \frac{50 - j90}{3 + j4} = \frac{(50 - j90)(3 - j4)}{(3 + j4)(3 - j4)} = -\frac{42}{5} - j\frac{94}{5}[A]$$

問8 三相交流回路では、各相間の位相差は

$\boxed{(1)}$  [rad]であり、度数で表すと  $\boxed{(2)}$  となる。三相回路の計算は単相回路の計算に比べて複雑となるが、電源電圧の大きさが同一で、位相差が互いに  $\boxed{(1)}$  [rad]で、負荷各相のインピーダンスが等しい場合は、三相平衡回路となり、等価単相回路の計算で対応する。しかし、各相の電圧や回路定数が不ぞろい、断線、短絡、地絡などの事故・故障などのときは、各相の電圧・電流がアンバランスとなり  $\boxed{(4)}$ 、その回路計算は複雑となる。 $\boxed{(3)}$  はこのような三相不平衡回路の計算を平衡回路に直して計算する計算法である。 $a = \varepsilon^{j\frac{2\pi}{3}}$  とすると、

$a = \boxed{(5)}$  ,  $a^2 = \boxed{(6)}$  ,  $a^3 = \boxed{(7)}$  となる。また  $a^2 + a + 1 = \boxed{(8)}$  となる。

以下では  $a^3$  を u 相の基準とする。

u 相に対し v 相は  $\boxed{(2)}$  遅れている方向（時計回り）を正相とする。 $V_0$  を零相成分、 $V_1$  を正相成分、 $V_2$  を逆相成分とすれば、u,v,w の相電圧は行列で示すと(9)式となる。また、余因子行列や掃き出し法などから逆行列を求めると(10)式の零相成分、正相成分、逆相成分を求めることができる。

- (1)  $2\pi/3$       (2)  $120^\circ$       (3) 対称座標法      (4) 三相不平衡回路

(5)  $a = \varepsilon^{j\frac{2\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$

(6)  $a^2 = \varepsilon^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = \varepsilon^{-j\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{a}$       (7)  $a^3 = \varepsilon^{j2\pi} = 1 = \varepsilon^{j0}$       (8)  $a^2 + a + 1 = 0$

(9) 
$$\begin{bmatrix} \dot{V}_u \\ \dot{V}_v \\ \dot{V}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix}$$

(10) 
$$\begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_u \\ \dot{V}_v \\ \dot{V}_w \end{bmatrix}$$

逆行列を求めるには、余因子行列や掃き出し法などがある。ここでは余因子行列を用いた方法で、逆行列を求めることとする。(9)式で用いる行列を A とすると

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}$  とすると、その逆行列は  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$  で計算できる。

サラスの公式を用いて行列式を求めると

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = a + a^4 + a - (a^2 + a^2 + a^2) = a^4 - 3a^2 + 2a$  となる。

$A_{11} \sim A_{33}$  の余因子を展開すると

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a \\ a & a^2 \end{vmatrix} = a^4 - a^2 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & a^2 \end{vmatrix} = -(a^2 - a)$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a^2 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - a^2 \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & a^2 \end{vmatrix} = -(a^2 - a)$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a^2 \end{vmatrix} = a^2 - 1 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -(a - 1)$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a \\ a & a^2 \end{vmatrix} = a^4 - a^2 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -(a - 1)$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a^2 \end{vmatrix} = a^2 - 1 \text{ となる。}$$

$$a^2 = \varepsilon^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = \varepsilon^{-j\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{a} \quad , \quad a^3 = \varepsilon^{j2\pi} = 1 = \varepsilon^{j0} \quad , \quad a^2 + a + 1 = 0 \text{ の結果を用いると}$$

行列式は  $|A| = a^4 - 3a^2 + 2a = a(a^3 - 3a + 2) = a(-3a + 3) = -3a(a - 1)$  となる。また、上の結果を用いると

$$\frac{A_{11}}{|A|} = \frac{a^2(a+1)(a-1)}{-3a(a-1)} = \frac{a^2+a}{-3} = \frac{1}{3} \quad \frac{A_{12}}{|A|} = \frac{-a(a-1)}{-3a(a-1)} = \frac{1}{3} \quad \frac{A_{13}}{|A|} = \frac{-a(a-1)}{-3a(a-1)} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{A_{21}}{|A|} = \frac{-a(a-1)}{-3a(a-1)} = \frac{1}{3} \quad \frac{A_{22}}{|A|} = \frac{(a+1)(a-1)}{-3a(a-1)} = \frac{a+1}{-3a} = \frac{-a^2}{-3a} = \frac{a}{3} \quad \frac{A_{23}}{|A|} = \frac{-(a-1)}{-3a(a-1)} = \frac{1}{3a} = \frac{a^2}{3}$$

$$\frac{A_{31}}{|A|} = \frac{a^2(a+1)(a-1)}{-3a(a-1)} = \frac{a^2+a}{-3} = \frac{1}{3} \quad \frac{A_{32}}{|A|} = \frac{-(a-1)}{-3a(a-1)} = \frac{1}{3a} = \frac{a^2}{3}$$

$$\frac{A_{33}}{|A|} = \frac{(a+1)(a-1)}{-3a(a-1)} = \frac{a+1}{-3a} = \frac{-a^2}{-3a} = \frac{a}{3}$$

これをまとめると

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}$$

となる。よって

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_u \\ \dot{V}_v \\ \dot{V}_w \end{bmatrix}$$

を求めることができる。