

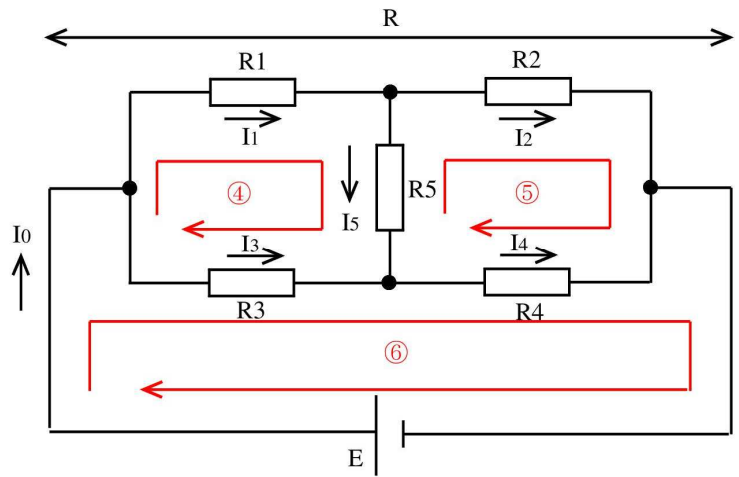
問1 図の回路で、 $R_1/R_2=R_3/R_4$  の関係が成り立っているときには、合成抵抗  $R$  の値は  $R_5$  には無関係であることを示せ。

キルヒホッフの第一法則より

$$\begin{cases} I_0 = I_1 + I_3 \dots (1) \\ I_1 = I_5 + I_2 \dots (2) \\ I_4 = I_3 + I_5 \dots (3) \end{cases}$$

また、キルヒホッフの第二法則より

$$\begin{cases} R_1 I_1 + R_5 I_5 - R_3 I_3 = 0 \dots (4) \\ R_2 I_2 - R_4 I_4 - R_5 I_5 = 0 \dots (5) \\ R_3 I_3 + R_4 I_4 - E = 0 \dots (6) \end{cases}$$



が成り立つ。題意より、 $R_1/R_2=R_3/R_4$  の関係が成り立っているときには、 $I_5=0$  であるので、(1)-(3) 式に代入すると

$$\begin{cases} I_0 = I_1 + I_3 \dots (7) \\ I_1 = I_2 \dots (8) \\ I_4 = I_3 \dots (9) \end{cases}$$

となる。 $I_5=0$ ,  $I_2=I_1$ ,  $I_4=I_3$  を(4)-(5)式に代入すると

$$\begin{cases} R_1 I_1 = R_3 I_3 \dots (10) \\ R_2 I_1 = R_4 I_3 \dots (11) \\ E = (R_3 + R_4) I_3 \dots (12) \end{cases}$$

となる。(10),(11)式より

$$(R_1 + R_2) I_1 = (R_3 + R_4) I_3$$

が成り立つので、(12)式と組み合わせると

$$E = (R_1 + R_2) I_1 = (R_3 + R_4) I_3$$

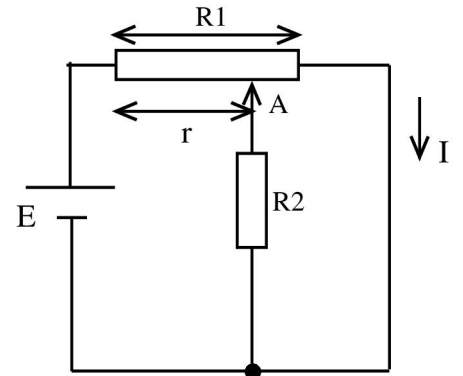
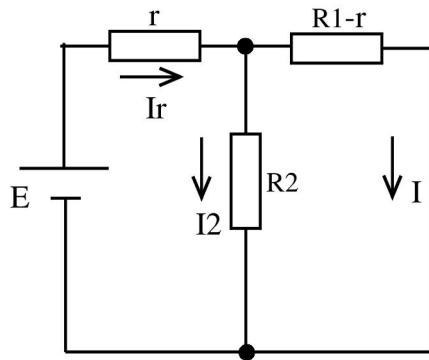
となるため、合成抵抗  $R$  は上段( $R_1+R_2$ )と下段( $R_3+R_4$ )の並列抵抗の合成となり

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4}$$

であるので、 $R_5$  とは無関係であることが分かる。

問2 図の回路で、抵抗器（抵抗  $R_1$  で一定）のブラシ位置  $A$  を移動した場合（抵抗  $r$  は可変で、 $0 \leq r \leq R_1$ ）、電流  $I$  が最小となるときの  $r/R_1$  の値を求めよ。

図の回路を整理すると



となり、電源  $E$  から見た合成抵抗を  $R$  とすると

$$R = r + \frac{R_2(R_1 - r)}{R_2 + (R_1 - r)} = \frac{R_1 R_2 + R_1 r - r^2}{R_1 + R_2 - r}$$

となる。

抵抗  $R_2$  と抵抗  $R_1 - r$  は並列接続で、電圧は等しいので

$$R_2 I_2 = (R_1 - r) I$$

が成り立つ。

また、合成抵抗  $R$  より、電源から流れる電流  $I_r$  は

$$I_r = \frac{E}{R} = \frac{R_1 + R_2 - r}{R_1 R_2 + R_1 r - r^2} \cdot E$$

となる。

キルヒホッフの第一法則より

$$I_r = I + I_2$$

が成り立つので、上式の結果を代入して

$$\frac{R_1 + R_2 - r}{R_1 R_2 + R_1 r - r^2} \cdot E = I + \frac{R_1 - r}{R_2} \cdot I$$

となり、電流  $I$  について整理すると

$$I = \frac{R_2 E}{R_1 R_2 + R_1 r - r^2}$$

となる。右辺の分母が最大となったときに、電流  $I$  は最小となるので

$$\frac{d}{dr} \{R_1 R_2 + R_1 r - r^2\} = R_1 - 2r = 0$$

故に

$$\frac{r}{R_1} = \frac{1}{2}$$

のとき、電流  $I$  が最小となる。これは、 $R_1$  の抵抗値が二等分された  $r = R_1/2$  のとき最小値を取るといえる。