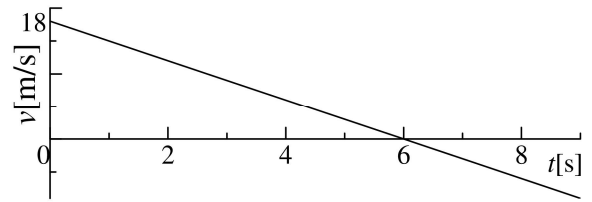


問1 x軸上を運動する物体が時刻  $t=0$  秒のときに原点を正の向きに通過し、以後図のように速度が変化した。(1)図の1次関数  $v(t)$ を求めよ。(2)この物体の加速度は何 $[m/s^2]$ か。(3)物体が原点から正の向きに最も遠ざかる位置は、原点から何 $[m]$ か。(4) $t=8.0$  秒のときの物体の位置は、原点から何 $[m]$ か。(5)0~8.0秒間に物体が移動した距離は何 $[m]$ か。



$v(t) = at + 18$  とおき、6秒時の速度が0であるので  $v(6) = at + 18 = 0$  を解いて  $a$  を求めると

$$(1) v(t) = -3t + 18 \quad \text{①}$$

(2) (1)の傾きより、加速度  $a$  は  $-3.0 [m/s^2]$

物体の位置  $x(t)$ は速度  $v(t)$ の積分から求まるので

$$x(t) = \int v(t)dt = -\frac{3}{2}t^2 + 18t + C$$

時刻  $t=0$  秒のときに原点を通過すると仮定するため、位置  $x(t)$ の原点は  $x(0)=0$  である。よって、積分定数  $C$  は0であり、物体の位置  $x(t)$ は次式となる。

$$x(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 18t \quad \text{②}$$

(3) 物体が原点から正の向きに最も遠ざかる位置は？と問われているので、②式の微分値が0となる位置、つまり①式が0となる時間での位置が最大値である。

$$x'(t) = v(t) = -3t + 18 = 0$$

を求めると、 $t=6$  のときとなる。

故に

$$x(6) = -\frac{3}{2} \cdot 6^2 + 18 \cdot 6 = 54$$

となり、最も原点から遠ざかる位置は  $54[m]$ となる。

$$(4) x(8) = -\frac{3}{2} \cdot 8^2 + 18 \cdot 8 = 48$$

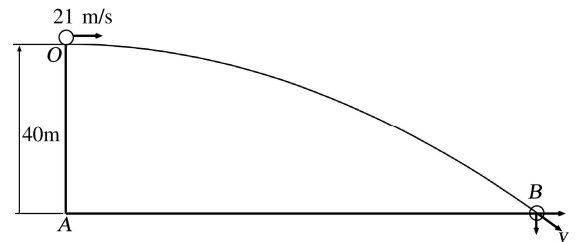
より、 $t=8$  のときの位置は  $48[m]$ である。

(5) 図より、0から6秒の間の速度は正であり、6秒から8秒の間の速度は負である。動きとしては、行って戻っている。移動した距離を求めるので、図の0-6秒の正の面積と、6-8秒の負の面積を正側に反転した面積を求める必要がある。 $x(t)$ は現在の位置を示す式であり、問われているのは移動した距離だからである。

$$\int_0^6 v(t)dt - \int_6^8 v(t)dt = \left[ -\frac{3}{2}t^2 + 18t \right]_0^6 - \left[ -\frac{3}{2}t^2 + 18t \right]_6^8 = 60$$

ゆえに、 $60[m]$

問2 地上40mの高さの点Oから、小球を水平方向に初速度21[m/s]で投げた。(1)x座標と、y座標の運動方程式を書け。(2)ラプラス変換を用いて(1)の運動方程式の微分方程式を解き、 $x(t)$ 、 $y(t)$ を求めよ。(3)小球を投げてから地面に当たるまでに何秒かかるか。(4)点Oの真下の地面の点Aから小球の落下地点Bまでの距離は何mか。(5)小球が地面に当たる直前の速度の鉛直成分の大きさは何[m/s]か。(6)小球が地面に当たる直前の速さは何[m/s]か。



(1)  $x, y$  軸の運動方程式は

$$mx''(t) = 0$$

$$my''(t) = -mg$$

なお、O点の座標を(0,0)と考え、y軸は落下なので-方向の位置になると考えた。

$$(2) \quad m [s^2 X(s) - sx(0) - x'(0)] = 0$$

x軸の原点の位置  $x(0)=0$ 、x方向の初速度を  $v_0$  とすると  $x'(0)=v_0$  なので

$$X(s) = \frac{v_0}{s^2} \quad \text{よって、} \quad x(t) = v_0 t \quad \text{①}$$

$$m [s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] = -m \cdot \frac{g}{s}$$

y軸の原点の位置  $y(0)=0$ 、y方向の初速度  $y'(0)=0$  なので

$$Y(s) = -\frac{g}{s^3} \quad \text{よって、} \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \quad \text{②}$$

(3) 小球は地上高40mの位置にあり、重力加速度  $g$  を  $9.8[\text{m/s}^2]$  とすると  $B(x(t), y(t)) = (? , -40)$  より

$$-40 = -\frac{1}{2}gt^2 \quad t = \sqrt{\frac{80}{9.8}} = 2.857 \quad \text{故に、地面に当たるまでに} 2.857[\text{s}] \text{かかる。}$$

(4) (3)で得られた時間より、 $x(2.857)$ を求めると

$$x(2.857) = 21 \cdot 2.857 = 59.997 \approx 60$$

ゆえにA点からB点までの距離は約60[m]

(5) y軸方向の速度は  $y'(2.857) = v_y(2.857) = -9.8 \cdot 2.857 \approx -28$  であり、その大きさ(スカラ)を求めると、28[m/s]となる。

(6) x軸方向の速度は初速度  $v_0$  のままであり ( $v_0=21[\text{m/s}]$ )、y軸の速度との合成ベクトル  $\vec{v}$  の大きさを求めると

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{21^2 + 28^2} = 35$$

ゆえに、35[m/s]

問3 なめらかな水平面上におかれた質量4.0kgの物体に、水平方向の6.0Nの力を2.0秒間加え続けた。

(1) このとき、物体の加速度は何[m/s<sup>2</sup>]か。力の向きを正の向きとする。(2)この2.0秒間に物体は何[m]進んだか。(3)2.0秒のときの速度を求めよ。

(1)運動方程式は  $F = mx''(t)$  であるので、加速度  $a$  を求めると  $a = x''(t) = \frac{F}{m} = \frac{6}{4} = 1.5$  となるので、1.5[m/s<sup>2</sup>]となる。

(2)  $s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = \frac{F}{m} \cdot \frac{1}{s}$  であり、力の加わり始めた時間0秒の位置  $x(0)=0$ 、

そのときの速度も  $x'(0)=0$  であるので、 $X(s) = \frac{F}{m} \cdot \frac{1}{s^3}$  を解くと  $x(t) = \frac{F}{m} \cdot \frac{1}{2}t^2$

よって、2秒後の物体の位置は  $x(2) = \frac{6}{4} \cdot \frac{1}{2}2^2 = 3$  であり、3[m]進んだ。

(3) (2)で求めた位置を微分して、速度を求めると  $v(t) = x'(t) = \frac{F}{m}t$

であるので、2秒後の速度を求めると  $v(2) = x'(2) = \frac{6}{4}2 = 3$

ゆえに、2秒後の速度は3[m/s]である。

問4 あらい水平面上においた物体を水平方向に押し、速さが  $v_0$ [m/s] になったときに手を放すと (初速度  $v_0$ )、物体はその位置から  $x$ [m] ずべて止まった。運動の向きを正の向きとする。(1) 運動方程式をたて、手を離れた瞬間を 0 秒としたときの物体の位置  $x(t)$  を解け。重力加速度は  $g$ [m/s<sup>2</sup>]、運動摩擦係数は  $\mu'$  とする。(2)  $t_1$  秒後、物体は停止した。そのときの物体の位置を示せ。(3) 速さが  $v_0$ [m/s] が 2.8[m/s]、 $t_1$  秒後、物体は 2[m] ずべて停止した。物体と面との間の運動摩擦係数  $\mu'$  はいくらか。重力加速度  $g$  は 9.8[m/s<sup>2</sup>] とする。(4) 物体がずべるときの加速度は何[m/s<sup>2</sup>]か。

(1) 運動摩擦係数を  $\mu'$  とすると、運動方程式は  $mx''(t) = -\mu' mg$  であり、手を離れた地点を 0 秒、 $x(0)$  とする。この微分方程式のラプラス変換は

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) = -\frac{\mu' g}{s}$$

であり、手を離れたときの位置を原点とすると  $x(0)=0$ 、その瞬間の速度を  $x'(0)=v_0$  とすると、

$$X(s) = \frac{v_0}{s^2} - \frac{\mu' g}{s^3} \text{ となり、 } x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} \mu' g t^2 \text{ となる。}$$

(2)  $t_1$  秒後停止したので、速度  $x'(t_1)=0$  である。  $v(t_1) = x'(t_1) = v_0 - \mu' g t_1 = 0$  であるので、

$t_1 = \frac{v_0}{\mu' g}$  となり、そのときの物体の位置  $x(t_1)$  は

$$x(t_1) = v_0 \cdot \frac{v_0}{\mu' g} - \frac{1}{2} \mu' g \left( \frac{v_0}{\mu' g} \right)^2 = \frac{v_0^2}{2\mu' g} \text{ となる。}$$

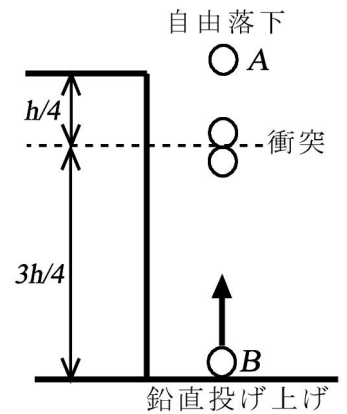
(3)  $x(t_1) = \frac{v_0^2}{2\mu' g} = 2 = \frac{2.8^2}{2\mu' \cdot 9.8}$  より、  $\mu' = \frac{2.8^2}{4 \cdot 9.8} = 0.2$

(4) 運動方程式より加速度  $x''(t)$  は  $x''(t) = -\mu' g = -0.2 \cdot 9.8 = -1.96$

であるので、-1.98[m/s<sup>2</sup>]である。

問5 地上  $h$ [m]の高さから小球 A を自由落下させ、それと同時に真下の地上から小球 B を真上に投げたところ、2 球は地上  $3h/4$ [m]の高さで衝突した。重力加速度の大きさを  $g$ [ $m/s^2$ ]とする。小球 A の重さを  $m_A$ 、B の重さを  $m_B$  とし、小球 B の初速度を  $v_0$  とする。鉛直方向の原点を地上とし、A、B の位置をそれぞれ  $y_A(t)$ 、 $y_B(t)$  とする。

- (1) それぞれの球の運動方程式を書け。
- (2) それぞれの球の運動方程式を解き、 $y_A(t)$ 、 $y_B(t)$  を求めよ。
- (3) 小球 A が落ち始めてから衝突するまでに何秒かかるか。
- (4) 小球 B の初速度の大きさは何 m/s か。



- (1) 運動方程式は以下のようになる。

$$m_A y_A''(t) = -m_A g$$

$$m_B y_B''(t) = -m_B g$$

- (2) 上記の微分方程式をラプラス変換すると  $s^2 Y_A(s) - s y_A(0) - y_A'(0) = -\frac{g}{s}$

A の小球の 0 秒時の位置は  $h$  であり、速度は  $0$  [m/s] であるので、 $y_A(0)=h$ 、 $y_A'(0)=0$  を代入すると

$$Y_A(s) = \frac{h}{s} - \frac{g}{s^3} \quad \text{となり、} \quad y_A(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{となる。}$$

また、B の小球の微分方程式をラプラス変換すると  $s^2 Y_B(s) - s y_B(0) - y_B'(0) = -\frac{g}{s}$

B の小球の 0 秒時の位置は  $0$  であり、速度は  $v_0$  [m/s] であるので、 $y_B(0)=0$ 、 $y_B'(0)=v_0$  を代入すると

$$Y_B(s) = \frac{v_0}{s^2} - \frac{g}{s^3} \quad \text{となり、} \quad y_B(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

- (3) 小球 A と B が衝突する時間を  $t_1$  とし、小球 A の位置  $y_A(t_1)=3h/4$  を解くことによって求める。

$$y_A(t_1) = \frac{3}{4} h = h - \frac{1}{2} g t_1^2 \quad \text{から } t_1 \text{ を求めると } t_1 = \sqrt{\frac{h}{2g}} \text{ [s] となる。}$$

- (4)  $t_1$  秒後に、B の小球は位置  $y_B(t_1)=3h/4$  となるので

$$y_B(t_1) = \frac{3}{4} h = v_0 \sqrt{\frac{h}{2g}} - \frac{g}{2} \cdot \frac{h}{2g} \quad \text{となり、これを解くと } v_0 = \sqrt{2gh}$$

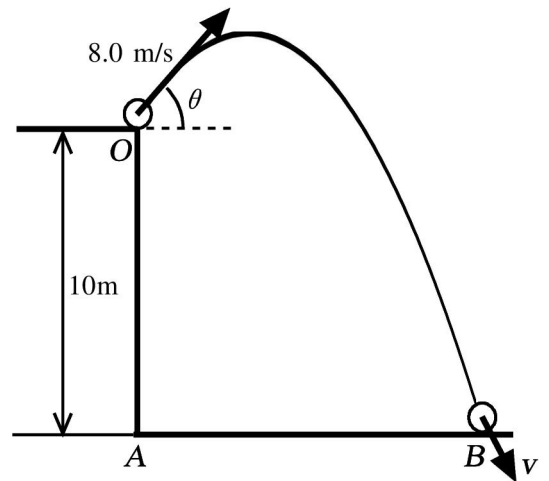
問6 地上 10[m]の高さの点 O から、水平と角  $\theta$  をなす上方へ小球を初速度 8.0 [m/s]で投げた。  
 $\sin\theta=0.60$ ,  $\cos\theta=0.80$  とする。

(1) 原点を O としたとき、運動方程式を書け。小球の重さを  $m$ , 重力加速度の大きさを  $g[\text{m/s}^2]$ とし、それぞれの位置は  $x(t)$ ,  $y(t)$  とする。

(2) 小球を投げてから地面に当たるまでに何秒かかるか。重力加速度の大きさを  $9.8[\text{m/s}^2]$ として求めよ。

(3) 点 O の真下の地面から小球の落下点 B までの距離は何 m か。

(4) 小球が地面に当たる直前の速さは何 m/s か。



(1) 運動方程式は以下のようなになる。

$$mx''(t) = 0$$

$$my''(t) = -mg$$

(2)  $y(t)$ についてラプラス変換すると  $s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = -\frac{g}{s}$   
 $y$  軸成分の位置は  $y(0)=0$ 、初速度  $y'(0)$ は  $v_0\sin\theta$ であるので

$$Y(s) = \frac{v_0 \sin \theta}{s^2} - \frac{g}{s^3} \text{ となり、 } y(t) = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

地面に当たる時間を  $t_1$  とすると上式  $y(t_1)$ は  $8 \cdot 0.6 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot t_1^2 = -10$  となる。

整理すると  $(49t_1 + 50)(t_1 - 2) = 0$  となり、 $t_1 > 0$  なので、地面に当たるまでに 2[s]かかる。

(3)  $x(t)$ についてラプラス変換すると  $s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = 0$   
 $x$  軸成分の位置は  $x(0)=0$ 、初速度  $x'(0)$ は  $v_0\cos\theta$ であるので

$$X(s) = \frac{v_0 \cos \theta}{s^2} \text{ となり、 } x(t) = v_0 \cos \theta \cdot t$$

地面に当たる時間  $t_1=2$  なので、上式  $x(t_1)$ は

$$x(2) = 8.0 \cdot 0.8 \cdot 2.0 = 12.8[m]$$

(4) 2 秒後( $t_1$ )での  $x, y$  軸の速度、 $x'(2)$ ,  $y'(2)$ を求めると

$$x'(2) = v_0 \cos \theta = 8.0 \cdot 0.8 = 6.4[m/s]$$

$$y'(2) = v_0 \sin \theta - gt_1 = 8.0 \cdot 0.6 - 9.8 \cdot 2.0 = -14.8[m/s]$$

となり、それぞれの速度ベクトルを合成して大きさ  $v$  を求めると

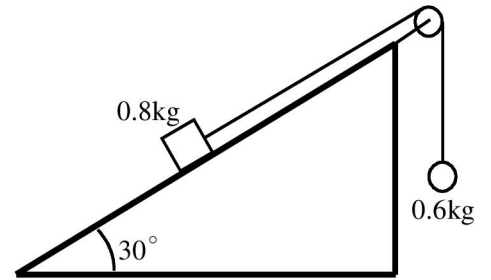
$$v = \sqrt{6.4^2 + 14.8^2} \approx 16.12[m/s]$$

問7 図のように、傾きの角が  $30^\circ$  のなめらかな斜面上に質量  $0.80\text{kg}$  の物体をおき、これを摩擦が無視できる滑車を通して質量  $0.60\text{kg}$  のおもりと軽い糸でつないでから、手を放す。斜面に沿った軸を  $x(t)$ 、垂直方向の軸を  $y(t)$  とする。

(1) 手を放す点を原点としたときの運動方程式を書け。斜面に置かれた四角の物体の重さを  $M$ 、丸いおもりの重さを  $m$ 、重力加速度の大きさを  $g[\text{m/s}^2]$ 、糸が引っ張る張力を  $T[\text{N}]$  とする。

(2) 物体の加速度を求めよ。また、張力  $T$  を求めよ。

(3) おもり  $m$  を取り替えることによって、物体の加速度の大きさは変えないで、向きだけを反対にしたい。おもり  $m$  を  $0.60\text{kg}$  から何  $\text{kg}$  にすればよいか。また、このときの張力  $T$  は何  $[\text{N}]$  か。



(1)  $x$  軸は、 $\theta$  が  $0^\circ$  では  $T$  しか力がかからず、 $90^\circ$  では  $T-Mg$  となるので

$$Mx''(t) = T - Mg \sin \theta$$

$$my''(t) = mg - T$$

(2) 加速度は両者とも等しいので  $x''(t) = y''(t) = a$  とし、両式を加えると

$$(M + m)a = g(m - M \sin \theta) \text{ より、 } a = \frac{m - M \sin \theta}{M + m} g$$

重力加速度の大きさを  $9.8[\text{m/s}^2]$  として加速度  $a$  を求めると

$$a = \frac{0.6 - 0.8 \cdot 0.5}{0.6 + 0.8} \cdot 9.8 = 1.4[\text{m/s}^2]$$

張力  $T$  は

$$T = m(g - y''(t)) = 0.6(9.8 - 1.4) = 5.04[\text{N}]$$

(3) おもり  $m(0.60\text{kg})$  を変更して、 $a$  の大きさを変えず、逆向きにしたいので

$$\frac{m - M \sin \theta}{M + m} g = -1.4 \text{ を満たす } m \text{ を求める。}$$

$$\frac{m - 0.8 \cdot 0.5}{0.8 + m} \cdot 9.8 = -1.4 \text{ から } m \text{ を求めると } m = 0.25 [\text{kg}]$$

また、このときの張力  $T$  を求めると

$$T = m(g - y''(t)) = 0.25(9.8 - (-1.4)) = 2.8[\text{N}]$$