

問1 なめらかな水平面上を20m/sの速さで進んできた質量0.10kgの小球が垂直な壁に当たって跳ね返り、14m/sの速さになった。

- (1) 小球が壁から受けた力積の大きさは何N・sか。
- (2) 小球と壁との接触時間が0.02sであるとする、壁が小球に及ぼした平均の力は何Nか。
- (3) 小球と壁との間のはね返りの係数はいくらか。



- (1) 小球の質量を m とすると運動方程式は $mx''(t) = F$ となり、壁に当たる直前の時間を t_1 、跳ね返って離れた瞬間の時間を t_2 とすると

$$\int_{t_1}^{t_2} mx''(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} Fdt \quad \text{となり、} \quad m(x'(t_2) - x'(t_1)) = F(t_2 - t_1) \quad \text{が求まる。}$$

壁に当たる前の速度 $x'(t_1)$ は 20m/s で、この向きを正とすると、跳ね返った後の速度 $x'(t_2)$ は -14m/s となるので

$$0.1(-14 - 20) = F(t_2 - t_1) = \text{力積} = -3.4[\text{N}\cdot\text{s}]$$

力積の大きさ(絶対値)は 3.4[N・s]と求まる。

- (2) $t_2 - t_1$ が 0.02s であるので $F = -\frac{3.4}{0.02} = -170[\text{N}]$ となる。ただし、定めた速度ベクトルの正の方向より、小球が壁に及ぼす力を示している。問われているのは壁が小球に及ぼした力であるので、170[N]と求まる。

- (3) はね返りの係数は $e = \frac{\text{衝突後、離れる速さ}}{\text{衝突前、近づく速さ}}$ であるので $e = \frac{14}{20} = 0.7$ が求まる。

問2 なめらかな水平面上を互いに反対の向きに、それぞれ 4.0m/s、10m/s の速さで進んできた質量 0.20kg の小球 A と質量 0.10kg の小球 B とが正面衝突した。2 球の間のはねかえり係数を 0.50 とする。



- (1) 衝突後、小球 A,B はそれぞれどちらの向きに何 m/s の速さで進むか。
 (2) この衝突の際に失われた力学的エネルギーは何 J か。

2つの物体 m_1, m_2 に働く力を考え

「 F_{12} : m_1 が m_2 から受ける力」、 「 $F_{21} = -F_{12}$: m_2 が m_1 から受ける力」とし、時刻 t_1 から t_2 での運動量の変化は

$$m_1 v_1(t_2) - m_1 v_1(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} F_{12} dt \quad m_2 v_2(t_2) - m_2 v_2(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} F_{21} dt = - \int_{t_1}^{t_2} F_{12} dt$$

となり、（左辺は運動量の変化を意味し、右辺は加えられた力積を意味します）

$m_1 v_1(t_2) - m_1 v_1(t_1) = -m_2 v_2(t_2) + m_2 v_2(t_1)$ を整理すると

$m_1 v_1(t_2) + m_2 v_2(t_2) = m_1 v_1(t_1) + m_2 v_2(t_1)$ が求まり、これを運動量保存の法則と呼んでいる。

衝突前の A の運動の向きを正とし衝突寸前の時間を t_1 、衝突後の時間を t_2 として A,B の向きはそれぞれ逆方向になると仮定し、運動量保存の法則に数値を代入すると、

$$0.2(-v_1(t_2)) + 0.1v_2(t_2) = 0.2 \cdot 4.0 + 0.1 \cdot (-10.0) = -0.2 \quad \text{①}$$

はね返りの係数は $e = \frac{\text{衝突後、離れる速さ}}{\text{衝突前、近づく速さ}}$ であるので、 v_1 を基準に考えると

$$e = \frac{v_2(t_2) + v_1(t_2)}{4 + 10} = 0.5 \quad \text{②}$$

①, ②式より $v_1(t_2) = 3.0[\text{m/s}]$ 、 $v_2(t_2) = 4.0[\text{m/s}]$ が求まる。故に、A は $3.0[\text{m/s}]$ 、B は $4.0[\text{m/s}]$ で、ともにはねかえる向きである。

運動エネルギー K (Kinetic Energy が由来) は力 F のかかった物体をある地点 x_1 からある地点 x_2 まで運ぶ仕事量 (= エネルギー) である。ここでは物体の速度を v 、物体の重さを m とすると運動方程式は

$F = m \frac{dv}{dt} \left(v = \frac{dx}{dt} \right)$ と表すことができる。これより運動エネルギー K を導出すると

$$K = \int F dx = m \int \frac{dv}{dt} dx = m \int \frac{dx}{dt} dv = m \int v dv = \frac{1}{2} m v^2$$

となる。

上記問いの場合、はねかえり係数が 1 でないため、衝突時にエネルギーが失われる。そのエネルギーを ΔK とすると

$$\Delta K = \frac{0.2}{2} (4^2 - 3^2) + \frac{0.1}{2} (10^2 - 4^2) = 4.9[\text{J}]$$

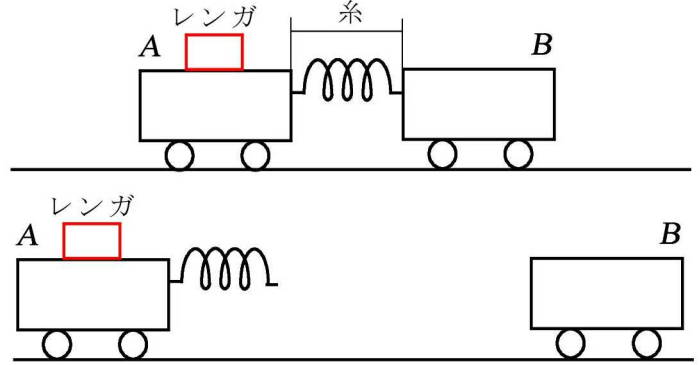
が求まる。

問3 なめらかな水平面上で、レンガを乗せた全質量 2.0kg の台車 A と質量 1.0kg の台車 B を糸でつなぐ。ばね定数 24N/m の軽いつるまきバネが自然の長さから 0.050m だけ縮められた状態で、台車 A,B の間に挟んである。

(1) 糸を焼き切ると、台車 A,B はそれぞれどちらの向きに進むか。また、A,B の速さの比はいくらになるか。

(2) はじめ、バネは弾性エネルギーを何 J 蓄えていたか。

(3) 台車 A,B が得た速さはそれぞれ何 m/s か。



運動量保存の法則を用いる。糸を切る前の速度は A,B とも 0 であり、運動量 $p_{stop} = \text{重さ} \times \text{速度} = 0$ である。A,B の質量を m_A, m_B 、糸を切った後の速度をそれぞれ v_A, v_B とし、A の台車が動く方向を正とすると(左辺は糸を切った後、右辺の運動量が 0 なのは速度が 0 だから)B は逆向きに動くので

$$m_A v_A + m_B (-v_B) = 2v_A - v_B = 0 \quad \text{①}$$

これより、台車 A は左向き、台車 B は右向きに動き、 $v_A : v_B = 1:2$

バネの運動方程式はフックの法則より $F = m \frac{dv}{dt} = -kx \left(v = \frac{dx}{dt} \right)$ となる。

($x > 0$ (伸びている状態)のとき $F = -kx < 0$ でバネを縮める方向に力がかかり、 $x < 0$ (縮んでいる状態)のとき $F = -kx > 0$ でバネを伸ばす方向に力がかかっている)

糸が引っ張っている力を F_{ito} とすると糸が切れる前の運動方程式は $-kx + F_{ito} = 0$ であるため、バネが蓄えている弾性エネルギー E (Elastic Energy) は

$$E = \int_0^x F_{ito} dx = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} 24(0.05)^2 = 0.03 [J]$$

バネが蓄えた弾性エネルギーと、糸が切れた後の台車 A,B 両者の運動エネルギーは等しいので

$$\frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

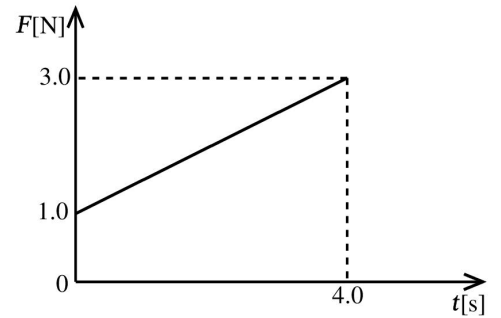
が成り立ち、 $0.03 = \frac{1}{2} 2v_A^2 + \frac{1}{2} v_B^2$ ② となる。

①、②式を解くと

$v_A = 0.1 [m/s]$ 、 $v_B = 0.2 [m/s]$ となる。

問4 なめらかな水平面上に x 軸をとる。 x 軸を正の向きに進む質量 2.0kg の物体が原点 O を 3.0m/s の速さで通過した瞬間から、図のように変化する力が物体の運動の向きに働いた。

- (1)物体に加えられた力積は何 $\text{N} \cdot \text{s}$ か。
- (2) $t=4.0$ 秒の瞬間の物体の速さは何 m/s か。
- (3) $t=0 \sim 4.0$ 秒の間に、物体がこの力から受けた仕事は何 J か。



図より、時間 t による力 $F(t)$ の 1 次関数は

$$F(t) = \frac{1}{2}t + 1 \quad \text{①}$$

力積 I (Impulse)は①式より

$$I = \int_0^4 F(t)dt = \int_0^4 \left(\frac{1}{2}t + 1\right) dt = \left[\frac{1}{4}t^2 + t\right]_0^4 = 8.0[\text{N} \cdot \text{s}]$$

運動量の変化 ΔP (運動量は Momentum:何故 P と呼ぶかは不明)と力積 I は等しいので、物体の重さを m 、速度を $v(t)$ として運動量の変化 ΔP を求めると

$$\Delta P = \int_0^4 m v'(t)dt = m[v(t)]_0^4 = m[v(4) - v(0)] = 2.0[v(4) - 3.0] = 8.0 \quad \text{となるため}$$

4 秒後の速度は $v(4)=7.0[\text{m/s}]$ と求まる。

原点 x_0 での速度を $v(0)$ 、4 秒後 x_4 での速度を $v(4)$ とすると $F = m \frac{dv}{dt} \left(v = \frac{dx}{dt}\right)$ より
仕事 W (Mechanical Work)[J]は

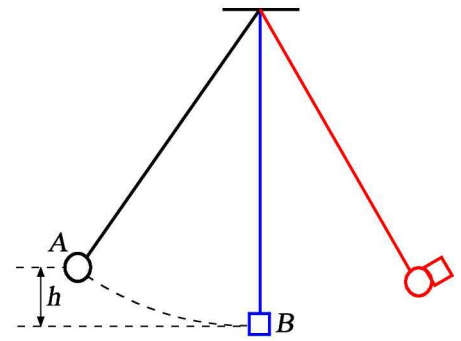
$$W = \int_{x_0}^{x_4} m \frac{dv}{dt} dx = \int_{x_0}^{x_4} F dx \quad \text{で求まる。}$$

$dx=vdt$ 、 $x_0 \rightarrow 0[\text{s}]$ 、 $x_4 \rightarrow 4[\text{s}]$ として置換積分すると

$$W = \int_{x_0}^{x_4} m \frac{dv}{dt} dx = m \int_0^4 \frac{dv}{dt} \cdot v \cdot dt = m \int_0^4 v dv = \frac{1}{2}mv(4)^2 - \frac{1}{2}mv(0)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2.0(7^2 - 3^2) = 40[\text{J}]$$

問5 天井に固定した糸に質量 $m[\text{kg}]$ の小球 A をつけ、糸がたるまないように最下点から $h[\text{m}]$ の高さまで持ち上げて静かに放す。小球は最下点で質量 $M[\text{kg}]$ の物体 B と衝突し、一体となった。重力加速度の大きさを $g[\text{m/s}^2]$ とする。

- (1) 小球 A が物体 B に衝突する直前の速さは何 m/s か。
- (2) 小球 A と物体 B が一体となった直後の速さは何 m/s か。
- (3) 一体となった小球 A と物体 B は、最下点から何 m の高さまで上がるか。



位置エネルギー U (Potential Energy: 何故 U と書くかは不明) は $F = mg$ の運動方程式を最下点 $0[\text{m}]$ から $h[\text{m}]$ の高さまで持ち上げたエネルギーなので

$$U = \int_0^h F dh = \int_0^h (mg) dh = mgh$$

運動エネルギー K は

$$K = \int F dx = m \int \frac{dv}{dt} dx = m \int \frac{dx}{dt} dv = m \int v dv = \frac{1}{2} mv^2$$

エネルギー保存の法則より、 $U=K$ で $mgh = \frac{1}{2} mv^2$ が成り立つので

小球 A が物体 B に衝突する直前の速さ v は $v = \sqrt{2gh}[\text{m/s}]$ となる。

小球 A と物体 B が一体となるという条件より、物体 B は粘土のようなものであると考えられ、はねかえり係数は 0 (はねかえり係数 1 のときだけ運動エネルギーが保存される) であり、衝突の際に粘土の変形の仕事やべちゃっとくつつく際の摩擦熱で運動エネルギーが失われることを考える。衝突する直前と一体となった直後の運動量保存の法則にてここは考える必要がある。衝突する直前の速さを v 、衝突する直前の速度を v_{AB} として運動量保存の法則を求めると

$$mv = (m + M)v_{AB} \quad \text{となり、}$$

$$v_{AB} = \frac{m}{m + M} \sqrt{2gh}[\text{m/s}] \quad \text{が求まる。}$$

一体となった後、最下点から $h_{AB}[\text{m}]$ までの高さまで上がると考えると、エネルギー保存の法則より

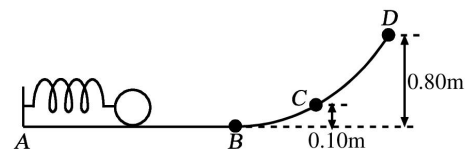
$$(m + M)gh_{AB} = \frac{1}{2}(m + M)v_{AB}^2 \quad \text{となるため}$$

$$h_{AB} = \frac{1}{2}(m + M)v_{AB}^2 \cdot \frac{1}{(m + M)g} = \frac{1}{2g} \cdot \left(\frac{m}{m + M}\right)^2 \cdot 2gh = \left(\frac{m}{m + M}\right)^2 h[\text{m}]$$

が求まる。

問6 図のように、なめらかな水平面 AB と曲面 BD が接続され、A にバネ定数 8.0N/m のつる巻バネが固定されている。このバネの他端に質量 0.010kg の小球を押しつけ、バネを 0.070m 縮めてから放す。

- (1) 小球が C の位置に来たときの速さは何 m/s か。
- (2) 小球は B を通る水平面から何 m の高さまで上がるか。
- (3) 小球が D の位置まで上がるようにするには、バネを何 m 押し縮めればよいか。



バネが蓄えている弾性エネルギーE、運動エネルギーK、位置エネルギーU がそれぞれエネルギー保存の法則より、 $E=U+K$ と保存されるので

$$E = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2}kx^2$$

$$K = \int F dx = m \int \frac{dv}{dt} dx = m \int \frac{dx}{dt} dv = m \int v dv = \frac{1}{2}mv^2$$

$$U = \int_0^h F dh = \int_0^h (mg) dh = mgh$$

より $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$ ① が成り立つ。

小球が C の位置に来たときの速度を v_C とすると

$$v_C^2 = \frac{2}{m} \left(\frac{1}{2}kx^2 - mgh \right) = \frac{2}{0.01} \left(\frac{1}{2} \cdot 8.0(0.07)^2 - 0.01 \cdot 9.8 \cdot 0.1 \right) = 1.96$$

となるので、 $v_C=1.4$ [m/s]と求まる。

小球が h [m]の高さまで上がったとき、小球の速度が 0[m/s]となるので①式より

$$h = \frac{1}{2mg}kx^2 = \frac{1}{2 \cdot 0.01 \cdot 9.8} 8.0(0.07)^2 = 0.2$$
[m]

と求まる。

小球が D の位置まで上がるようにするのに、バネを x_D [m]押し縮め、小球の速度が 0[m/s]となる
とすると、①式より、

$$x_D^2 = \frac{2mgh}{k} = \frac{2 \cdot 0.01 \cdot 9.8 \cdot 0.8}{8.0} = 0.0196$$

となるので、 $x_D=0.14$ [m]と求まる。