

電気回路のベクトルについて

ゼミを行うと、なんらや怪しげな説明や回答が現れてくるので少し三相交流電源のおさらいをメモしておきます。ここで説明したいことは「**u 相電圧より線間電圧 uv は√3 倍大きく、30 度進んでいる**」です。

三相交流電圧の瞬時値は、相順を u, v, w とすると

$$e_u = E_m \sin \omega t \quad e_v = E_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \quad e_w = E_m \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right)$$

と一般的には表記されていると思います。u 相よりも v 相の方が $2\pi/3$ [rad] または 120 度遅れています。v 相が 120 度進みとすると、逆相になってモータなどが逆回転するので気をつけてください。

上の式は相電圧を示しており、通常使用する電源は線間電圧なので、uv 間の電圧の瞬時値(瞬時値の記号は小文字で書くことが一般的です)は以下の式となります。

$$\begin{aligned} v_{uv} &= E_m \sin \omega t - E_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) = E_m \left[\sin \omega t - \left\{ \sin \omega t \cos \frac{2\pi}{3} - \cos \omega t \sin \frac{2\pi}{3} \right\} \right] \\ &= E_m \left[\sin \omega t - \left\{ -\frac{1}{2} \sin \omega t - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega t \right\} \right] = \frac{\sqrt{3}E_m}{2} \left(\sqrt{3} \sin \omega t + \cos \omega t \right) \quad (1) \end{aligned}$$

(1)式と至るにあたって、加法定理を用いました。忘れている人はおさらいしておいてください。

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ を使用しています。

(1)式のままではわかりにくいので、下記の三角関数の合成を行います。これも忘れた人はおさらいしておいてください。

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \left(\theta + \tan^{-1} \frac{b}{a} \right) \quad \text{ただし、} a \geq 0. \quad a < 0 \text{ の時は } \pi \text{ を加算。}$$

$$v_{uv} = \sqrt{3}E_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right) \quad (2)$$

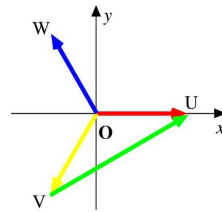


図1 ベクトル図

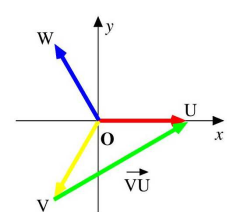


図2 学生の考え方

となります。と、説明するとほとんどの場合「なぜ線間電圧 v_{uv} は相電圧 u から相電圧 v を引いたものになるのかわからない」と当学の学生の場合なりますので、図1のベクトル図で「ほら、このようなベクトル図を書けば、 $V_{uv} = e_u - e_v$ となるでしょ？」という解説をしておさらいを終えます。すると、輪講になった途端、毎年のように V_{vu} とか $V_{uv} = e_v - e_u$ という解説を学生が行いはじめます。なぜ学生がこのような思考をたどるのかようやくわかったのでメモを残します。

学生は、高校時代に \vec{OU} というベクトル表記法を学んでいます。高校時代のベクトル表記では図2に示すように v ベクトルから見た u ベクトルは確かに \vec{vU} と記述します。しかし電気回路用ベクトル表記では

$$\dot{V}_{uv} = \dot{E}_u - \dot{E}_v \quad (3)$$

v ベクトルから見た u ベクトルは(3)と書きます。頭の中で表記方法がごっちゃになっているのが主な原因で、「電気回路では上にボツォをつけるのがベクトルだよと聞かなかった？さらに後ろ側にある記号 v が基準点(オシロの蓑虫クリップ側)と聞かなかった？」という「忘れました」で毎度終わります。できれば4年生まで継続的に使わせて、記憶に残るようにしたいです。

ここまでの説明で何となく学生がわかった気になります。ところが説明図を消して「じゃあ1から再度説明して」となると、「おさらい箇所」加法定理でつまづきます。「コスモスが咲いた?とかのロゴあわせがあったけど、さっぱり忘れてしまったのでわかりません」と続きます。「忘れたときのために、オイラーの公式を用いた加法定理の導き方を僕の数学の講義(小テストを含め、4回くらいは半期の授業中のテストで証明させています)でやったよね?」と尋ねると、「オイラーの公式をやったのは覚えています、どんな風に導いたのかを忘れました」という流れになります。

$$\varepsilon^{j(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha + \beta) + j \sin(\alpha + \beta) \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{j(\alpha+\beta)} &= \varepsilon^{j\alpha} \cdot \varepsilon^{j\beta} = (\cos \alpha + j \sin \alpha)(\cos \beta + j \sin \beta) \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + j(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ②より

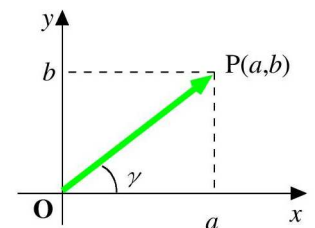
$$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{cases}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

と解説すると、「やった覚えがあります」とまた思い出さうです。加法定理で式を整理する際、cosは第1,4象限が+, sinは第1,2象限が+と説明しないと駄目な学生もいますが、だいたいコツコツ計算して(1)式まではたどり着きます。次の障害は「三角関数の合成」となります。現在の4年生達に聞くと、高校時代数学2でやっており、「やった記憶はあるが、高校時代には公式を暗記せよと言われた。今ではすっかり抜けていてわかりません。」とのことです。当学のスカラー100特待生(センターや一般入試で高得点を取った学生に与えられる学費全額免除学生)に聞いても同様な答えが返ってきたので、ほとんどの学生にとっては忘却の彼方になっているのでしょう。そこで、「さっき、加法定理を導いたよね。それを使って導きましょう」と新たなおさらいが始まります。

$$\begin{aligned} a \sin \theta + b \cos \theta &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \gamma \sin \theta + \sin \gamma \cos \theta) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \theta + \gamma) \end{aligned}$$

$$\tan \gamma = \frac{b}{a}$$



となるでしょ?と説明すると、少し顔つきが怪しい学生はいるものの、たいていは理解できるようです。ここまで解説をすれば、学生が教師役をやっても再現が可能となります。

次に同じ説明を「複素ベクトルを用いて説明するよ」と続きます。「先ほどオイラーの公式を使ったけれど、これを使えばさっきのベクトルの話もすっきりするよ。もう1,2年の頃に何度もやっているよね」と話します。t=0[s]のときのu相を基準にとった相電圧ベクトルの式は次のようになるよね。

$$\dot{E}_u = E\varepsilon^{j0} = E \quad \dot{E}_v = E\varepsilon^{-j\frac{2\pi}{3}} = E \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \dot{E}_w = E\varepsilon^{j\frac{2\pi}{3}} = E \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\dot{V}_{uv} = E\varepsilon^{j0} - E\varepsilon^{j\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3}E \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right) = \sqrt{3}E\varepsilon^{j\frac{\pi}{6}}$$

「このように、加法定理や三角関数の合成を行わずに、簡単に求まるよね。」でゼミが終了となります。「いろいろと書き足していくと、どんどん長くなって、どこがポイントか、だんだん学生にわからなくなる。」ということを繰り返しています。言いたいことは「u相電圧より線間電圧uvは√3倍大きく、30度進んでいる」だけですけれど。