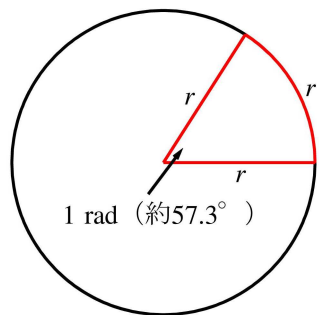


NO3 語句解説 —光源—

1. ある光源の平均球面光度が 200cd であった。この光源の全光束[lm]を求めよ。

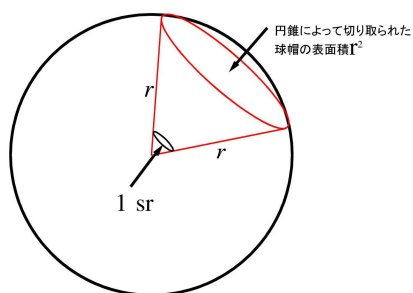
平面角「高校数学」(ラジアン) の定義。半径 r の円で、円弧の長さが r となる中心角を 1rad (ラジアン) という。



円周をどれくらい切り取ったか

全円周は $2\pi r$ なので、全平面角は $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ より、 2π [rad]。

立体角 (ステラジアン) の定義。半径 r の球を円錐状に切り取ったとき、円錐の底の円によって切り取られた球面の面積が r^2 となる頂点の角 (立体角) を 1sr (ステラジアン) という。



球の表面積をどれくらい切り取ったか

半径 r の球の表面積は $S=4\pi r^2$ 、球の体積は $V=4/3\pi r^3$ 球全体の立体角は

$$\omega = \frac{S}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \text{ より、} 4\pi \text{ [sr]。}$$

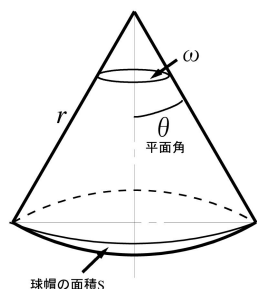
球帽を切り取る円錐の半径は $r\sin\theta$ なので、その円周は $2r\sin\theta$ 。

$\Delta\theta$ 変化したときの円周の太さは $r\Delta\theta$ 。平面角が 0 から θ まで変化するときの円周の和が球帽の面積 S なので

$$S(\theta) = \int_0^\theta 2\pi r \sin\theta \cdot r d\theta = 2\pi r^2 [-\cos\theta]_0^\theta = 2\pi r^2(1 - \cos\theta)$$

$r=1$ のときの立体角 ω と平面角 θ との関係式は

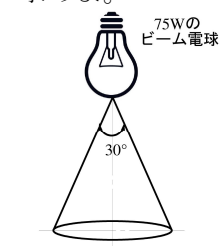
$$\omega = 2\pi(1 - \cos\theta)$$



光源の光度 I [c d] は $I = \frac{F}{\omega}$ [cd] で表される。すなわち、光度はその方向の単位立体角 (1sr) 当たりの光束の量である。従って、光度 I [cd] の点光源から、 ω [sr] 内に放射される光束 F [lm] は $F = \omega I$ [lm] となる。

上式を用いて、全光束を求める。光源から全方向を見た立体角は 4π [sr] なので $F = \omega I = 4\pi \times 200 \approx 2513$ [lm]

2. 図に示すハロゲンビーム電球がある。その配光は光柱の軸線に対して対称であって、ビーム光束は光柱の開き 30° の平面角内に投射されるものとする。ビーム電球の効率を 10lm/W とするし、光柱の平均光度 [cd] の値を求めよ。

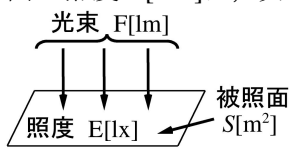


光源の光度 I [c d] は $I = \frac{F}{\omega}$ [cd] で表される。効率を η で表すと

$$I = \frac{F}{\omega} = \frac{P \cdot \eta}{2\pi(1 - \cos\theta)} = \frac{75 \times 10}{2\pi(1 - 0.966)} \approx 3.51 \times 10^3 \text{ cd}$$

3. 円形テーブルの中心点の直上に全光束 1500 lm で均等放射する電球を取り付けた。この円形テーブル面の平均照度[lx]の値を求めよ。ただし、電球から円形テーブル面までの距離に比べ電球の大きさは無視できるものとし、電球から円形テーブル面を見た立体角は 0.74sr, 円形テーブルの面積は 2m² とする。

図に示す被照面の照度 E[lx]は、次式で表される。すなわち、照度は、単位面積[1m²]当たりの入射光束の量[lm]である。

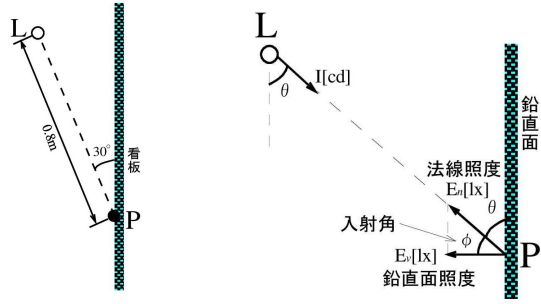


$$E = \frac{F}{S} [lx]$$

従って、被照面 S[m²]の平均照度を E[lx]とするのに必要な光束 F[lm]は $F = ES [lm]$ となる。

テーブルへ入射する光束は $F = 1500 \times \frac{0.74}{4\pi} [lm]$ 平均照度 $E = \frac{\text{入射光束 } [lm]}{\text{テーブル面積 } [m^2]} = \frac{1500 \times 0.74}{2 \times 4\pi} \approx 44.2 [lx]$

4. 図のように、看板を照らす光源 Lがある。看板上の点 P の照度を 200lx とするために必要な光源の LP 方向の光度[cd]の値を求めよ。ただし、点 P は光源 L を含み看板上に直角な平面上にあるものとする。



説明図

鉛直面照度 E_v を 200lx とするために光源の LP 方向の光度[cd]を求める問題である。法線照度 E_n は、点 P が半径 l の球面上の点と考え、光度 $I [cd]$ が法線照度に向かって投射されていると考える。

$$E_n = \frac{F}{S} = \frac{\omega I}{S} = \frac{(\text{球の立体角}) \times I}{\text{球の表面積}} = \frac{4\pi I}{4\pi l^2} = \frac{I}{l^2} [lx]$$

説明図を見ればわかるように、鉛直面照度 E_v は、壁面上の照度に対応するもので、入射角を ϕ とすると $\phi + \theta = 90^\circ$ であるので $E_v = E_n \cos \phi = E_n \cos(90^\circ - \theta) = \frac{I}{l^2} \sin \theta [lx]$

$$I = \frac{E_v l^2}{\sin \theta} = \frac{200 \times 0.8^2}{\sin 30^\circ} = \frac{200 \times 0.64}{0.5} = 256 [cd]$$

5. 次の式を変形せよ。

- (1) $\sin(\theta + 90^\circ)$
- (2) $\cos(90^\circ - \theta)$
- (3) $\tan(\theta + 90^\circ)$
- (4) $\sin(180^\circ - \theta)$
- (5) $\cos(\theta + 180^\circ)$
- (6) $\tan(180^\circ - \theta)$

まじめにやるなら、加法定理 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ 。

(1)ならば、 $\sin(\theta + 90^\circ) = \sin \theta \cos 90^\circ + \cos \theta \sin 90^\circ = \sin \theta \cdot 0 + \cos \theta \cdot 1 = \cos \theta$

公式の暗記

90° に関係したもの

- $\sin \rightarrow \cos$
- $\cos \rightarrow \sin$
- $\tan \rightarrow 1/\tan$

180° に関係したもの

- $\sin \rightarrow \sin$
- $\cos \rightarrow \cos$
- $\tan \rightarrow \tan$

- (1) $\sin 120^\circ > 0$ より $\sin(\theta + 90^\circ) = +\cos \theta$
- (2) $\cos 60^\circ > 0$ より $\cos(90^\circ - \theta) = +\sin \theta$
- (3) $\tan 120^\circ < 0$ より $\tan(\theta + 90^\circ) = -\frac{1}{\tan \theta}$
- (4) $\sin 150^\circ > 0$ より $\sin(180^\circ + \theta) = +\sin \theta$
- (5) $\cos 210^\circ < 0$ より $\cos(\theta + 180^\circ) = -\cos \theta$
- (6) $\tan 150^\circ < 0$ より $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

符号は後で決める。もとの式に $\theta = 30^\circ$ をぶち込んでみる。